３年の「式の計算」では、下のように、積の形の式を和の形になおす(展開)と、その逆で、和の形の式を積の形になおす(因数分解)、２つの計算をメインとして学習する。

$$a(b+c) \underset{\text{因数分解}}{\overset{\text{展開}}{\rightleftarrows}} ab+ac$$

Ⅰ．式の展開

中３の「**展開**」を、式の種類から分類すれば

多項式×単項式，　多項式÷単項式，　多項式×多項式

の３つになる。

Ａ．＜多項式×単項式＞

【例題 1】

次の計算をせよ。

(1) $(2a+3b)\times 5a$　　(2) $-6x(x-2y)$

(3) $(12a^2-9a)\div 3a$　　(4) $(2x^2y-3xy^2-xy)\div(-xy)$

$\boxed{\text{解}}$

(1) $(2a+3b)\times 5a$

$=5a\times(2a+3b)$　　※ 各項にかける‼

$=5a\times 2a+5a\times 3b$ ………この式は省いてよい

$=10a^2+15ab$

(2) $-6x(x-2y)$　　※ ＋(＋…，－(－…、つまり同符号は正‼

$=-6x^2+12xy$　　＋(－…，－(＋…、つまり異符号は負‼

(3) $(12a^2-9a)\div 3a$　　※ かけ算と同じく各項を割るが、に

$=\dfrac{\overset{4}{\cancel{12}}a^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{3a}}-\dfrac{\overset{3}{\cancel{9a}}}{\cancel{3a}}$　　※ それぞれを分数の形にして約分を利用‼

$=4a-3$

［注］(3)のタイプで分数の形にするとき、$\dfrac{12a^2-9a}{3a}$のような形に書くこともできるが、$\dfrac{12a^2-9a}{3a}=12a^2-3$ のように片方だけの約分ミスをする生徒が多くオススメできない。もちろん、そんなミスはしないと自信のある人はどうぞご自由に。

(4) $(2x^2y - 3xy^2 - xy) \div (-xy)$

$$= \frac{2x^2y}{-xy} - \frac{3xy^2}{-xy} - \frac{xy}{-xy}$$

$= -2x + 3y - \mathbf{1}$　　[注] この 1 を忘れないように‼

★ 1p の練習問題 $\boxed{1}$ をせよ。

■B. 式の展開

1) 多項式×多項式

前ページでも述べたように、「展開」とは「積の形の式を和の形の式になおす」ことであるが、別な表現をすれば、「かっこのある式を、かっこのない式になおす」ことであり、多項式×多項式の場合が最も良く当てはまると言えよう。

【例 1】　$(a + b)(c + d)$

$= (a + b)M$　　※ $c + d$ をひとつのものと見て M とおいた

$= aM + bM$

$= a(c + d) + b(c + d)$　　※ M を $c + d$ にもどした

$= ac + ad + bc + bd$　　……展開完了

これは　$(a + b)(c + d)$　の順でかけた結果の式である。

つまり、展開の仕方は、基本的には各項をすべてかけ合わせればよい、と言える。

また、それは、項がいくつあっても同じようにできる。

【例 2】　$(a + b)(c + d + e)$

$= ac + ad + ae + bc + bd + be$

【例 3】　$(2x + 1)(x - 3)$

$= 2x^2 - 6x + x - 3$　　※ 同類項はまとめる

$= 2x^2 - 5x - 3$

★ 2p の練習問題 $\boxed{2}$ をせよ。

2) 式の展開のトレーニング

式の展開は、誰にでもできる簡単な計算だが、それでもミスをするヤローがいるんだ。それは、符号のミス(これが一番多い)や指数の書き間違いなどである。

【例題 2】

次の式を展開せよ。

$(2x+y)(x-y)-(x+y)(3x-y)$

解

$(2x+y)(x-y)-(x+y)(3x-y)$

$=2x^2-2xy+xy-y^2-(3x^2-xy+3xy-y^2)$

［注］必ずかっこをつけて展開すること!!

かっこをせずに展開すると符号のミスが多い。

$=2x^2-2xy+xy-y^2-3x^2+xy-3xy+y^2$

$=-x^2-3xy$

★ 3p の練習問題 3 をせよ。

C. 乗法の公式

1） 乗法の公式

展開の練習を重ねると、何度も出てくる式の形があるのに気がつくであろう。
そのような式は、展開後の、同類項などを整理した式の形を覚え、それを利用すると計算もかなり速くなる。そのような考えの基にできたのが『乗法の公式』である。

乗法の公式

❶ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

❷ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

❸ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

2） $(x+a)(x+b)$の公式

この公式では、文字は x だけで、a, b は数と考える。実際に展開してみると、

$(x+a)(x+b)=x^2+bx+ax+ab$

$=x^2+(a+b)x+ab$

$\Uparrow$

ax と bx は同類項だからまとめて

【例 1】 $(\underset{\Downarrow}{x+3})(x+5)$

$$(x+\overset{a}{3})(x+\overset{b}{5})=x^2+(\overset{a+b}{3+5})x+\overset{ab}{3\times 5}$$

$=x^2+\quad 8x\quad +15$

つまり、a と b の和, a と b の積を求めればよいわけだ。

【例 2】 $(x-3)(x-5)=x^2+\{(-3)+(-5)\}x+(-3)\times(-5)$

$$=x^2-8x+15$$

【例 3】 $(x+3)(x-5)=x^2+\{3+(-5)\}x+3\times(-5)$

$$=x^2-2x-15$$

※ リクツが分かったら、一気に展開していこう。暗算でよい。

［注］下の式のように右側の項に文字があるときは注意が必要だ。

【例 4】 $(x+3y)(x-5y)=x^2-2xy-15y^2$

⇑

この文字を落としやすいので注意しよう‼

※ $(x+3)(x-5)=x^2-2x-15$ なら問題ないが、上の式のようにもう一つの文字 y がからむとミスが多くなる。

★ 4p の練習問題 $\boxed{4}$ をせよ。

3）和·差の平方の公式

$$\begin{cases}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\end{cases}$$

実際に展開してみると、

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$
$$=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\begin{array}{ccccc} (a+b)^2 & a^2 & 2\times a\times b & b^2 \\ \Downarrow\ \ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow\ \ \Downarrow\ \ \Downarrow & \Downarrow \end{array}$$

【例 1】 $(2x+3)^2=(2x)^2+2\times2x\times3+(3)^2$

$$=4x^2+12x+9$$

$$\begin{array}{ccccc} (a-b)^2 & a^2 & 2\times a\times b & b^2 \\ \Downarrow\ \ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow\ \ \Downarrow\ \ \Downarrow & \Downarrow \end{array}$$

【例 2】 $(3x-1)^2=(3x)^2-2\times3x\times1+(1)^2$

$$=9x^2-6x+1$$

※ 和と差の違いは、 の符号だけだ‼

【例 3】 $(-x-2y)^2=(-x)^2-2\times(-x)\times2y+(2y)^2$

$$=x^2+4xy+4y^2$$

※ これは慣れるまで 2 行で答を出し、慣れてきたら、一気に展開できるようにしよう。

★ 5p の練習問題 $\boxed{5}$ をせよ。

4）和と差の積の公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

実際に展開してみると、

$$(a+b)(a-b)=a^2\underbrace{-ab+ab}_{\text{消えてしまう!!}}-b^2=a^2-b^2$$ となるな。

【例】 $\overset{a+b}{\Downarrow}\ \overset{a-b}{\Downarrow}\ \ \ \overset{a^2}{\Downarrow}\ \ \overset{b^2}{\Downarrow}$

$$(3x+y)(3x-y)=(3x)^2-(y)^2$$
$$=9x^2-y^2$$

★ 6p の練習問題 $\boxed{6}$ をせよ。

5）乗法の公式のトレーニング

さて、今まで学習してきた『乗法の公式』は、考える時間を作らないほどに慣れてしまわなくてはならない。次の章で学習する「因数分解」がうまく行くためにも〈慣れの徹底〉が必要だ。

ここで、

【例題 3】

次の式を展開せよ。

$$(x-3)^2-(x-1)(x+7)$$

解

$$(x-3)^2-(x-1)(x+7)$$
$$=x^2-6x+9-(x^2+6x-7)$$ ※ くどいようだが、かっこ!!
$$=x^2-6x+9-x^2-6x+7$$
$$=-12x+16$$

★ 7p の練習問題 $\boxed{7}$ をせよ。

Ⅱ．因数分解

展開の逆で、和の形の式を積の形に変形することを『因数分解』という。
言葉を換えれば、かっこのない形の式から、かっこのある形の式にかえることである。

A. 因数分解の基本

1）因数と共通因数

① 因数

整数の場合と同様に、ひとつの式がいくつかの式の積の形になっているとき、

その１つ１つをもとの式の『**因数**』という。

【例 1】　$3mx$　…………　$3 \times m \times x$

因数

【例 2】　$(a+b)(c+d)$　……$(a+b) \times (c+d)$

※ つまり、単項式であっても多項式であっても、積の形になっていれば因数と言えるのである。

② 共通因数

多項式において、各項に共通な因数を『**共通因数**』という。

【例 1】　$\boldsymbol{m}x + \boldsymbol{m}y$　………　m が共通因数

【例 2】　$a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - b(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$　……$(x+y)$ が共通因数

2）因数分解の基本

ここまで学習してくると、『因数分解』がどのようなものであるかがおおよそ分かってきたことだろう。

因数分解の鉄則

共通因数があるときは、それを取り出してかっこでくくる‼

【例 1】　$mx + my = m(x+y)$

※ 逆に展開して左辺の式になれば、その変形(因数分解)は正しいと確認できるね。

【例 2】　$6x^2 + 3x = 3x(2x+1)$

$$6x^2 = 2 \times \underline{3 \times x} \times x$$
$$3x = \underline{3 \times x}$$

【例 3】　$a(x+y) - b(x+y) = (x+y)(a-b)$

※ 共通因数は単項式であろうと多項式であろうとすべて取り出す‼

★ 9p の練習問題 $\boxed{8}$ をせよ。

B. 乗法の公式を利用した因数分解

各式に、共通因数があるときは問題ないが、共通因数のない場合は因数分解できないかというとそうでもない。

たとえば、$a^2 - b^2$ には共通因数はないが、前の章で学習したように

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

と展開できるなら、$a^2 - b^2$ は $(a+b)(a-b)$ と因数分解できるはずである。

そう、乗法の公式は因数分解にも利用できるわけだ。

1） $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$

【例】 $4x^2 - 9 =$ $(2x + 3)(2x - 3)$

$(2x)^2 - 3^2$ ととらえる

2） $\begin{cases} \boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2} \\ \boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2} \end{cases}$

【例 1】 $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

$\underline{(x)^2}$ $\underline{2 \times x \times 4}$ $\underline{4^2}$

【例 2】 $9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$

$\underline{(3x)^2}$ $\underline{2 \times 3x \times 5}$ $\underline{5^2}$

［注］この公式が使える条件は、【例 1】の x^2 や 4^2，【例 2】の $(3x)^2$ と 5^2 のように、式の中に平方数や平方式（2 乗された数や式）の項があることだ。

★ 9p の練習問題 $\boxed{9}$ をせよ。

3） $\boldsymbol{x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)}$

まず、具体的な式と見比べてみよう。

$$\begin{cases} x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b) \\ x^2 + \quad 5x \quad + 6 \quad = (x + 3)(x + 2) \end{cases}$$

右辺の、3 と 2 という数字を見つけなければならないのだが、左辺の x の係数 5 と定数項 6 を見ると、**3 と 2 の和と積**になっていることがわかる。

つまり、

定数項（ab）が積
x の係数が　和 ｝となる 2 数 a, b を見つければよい‼

《$x^2 + 5x + 6$》の因数分解の手順

① 定数項 6 を 2 つの因数に分ける

$+6$ は、$+1$ と $+6$, -1 と -6, $+2$ と $+3$, -2 と -3 の 4 組

② その中で、和が x の係数 5 になるものをさがす

$+1$	-1	$+2$	-2
$+6$	-6	$+3$	-3
$+7$	-7	$+5$	-5
		コレダ‼	

よって、$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

※ 3 と 2 の順番はどちらでもよい。

【例題 4】

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 5x - 6$ (2) $x^2 - 10xy + 9y^2$

解

(1) -6 を分解すると、

-6	$+6$	$+2$	-2
$+1$	-1	-3	$+3$
-5	$+5$	-1	$+1$

つまり、$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$

［注］実際、君たちが因数分解するとき、上のようにやる必要はない。一瞬でパッと 2 つの数が見つかればそれでよい。見つからないときに、上のように 1 つ 1 つ調べていくわけだ。慣れてくると、2 ～ 3 秒で見つかるようになる。

(2) x のほかに y があるが、これは無視して

9 を分解すると、

$+9$	-9	$+3$	-3
$+1$	-1	$+3$	-3
$+10$	-10	$+6$	-6

よって、$x^2 - 10x + 9 = (x - 9)(x - 1)$

ここで、y を入れて(これを忘れないように‼)

$x^2 - 10xy + 9y^2 = (x - 9y)(x - y)$

1 は省け‼

★ 10p の練習問題 $\boxed{10}$ をせよ。

C. ちょっとレベルアップした因数分解

さて、因数分解の基本的学習が終わったところで、ちょっとレベルアップした因数分解を学習しておこう。

【例題 5】

次の式を因数分解せよ。

(1) $ax^2 + 6ax - 16a$ (2) $-x^2 - 3x + 4$

解

(1) $ax^2 + 6ax - 16a$ ※ 共通因数 a を取り出す

$= a(x^2 + 6x - 16)$

ここで終わってはダメ‼ 因数分解は、これ以上小さな因数に分解できない、というところまでするのがルールである。

$x^2+6x-16$ は 3 つの項だから、さらに因数分解できる可能性が大であり、因数分解できないかどうかチェックする必要がある。

$= a(x+8)(x-2)$………因数分解完了

(2) 2 次の項の係数が負の場合は、因数分解しづらい。そこで、-1 も共通因数と考えて、-1 を取り出すとかっこの中がふつうの式になる。

$-x^2-3x+4$　　※ $-(\cdots\cdots)$とする

$=-(x^2+3x-4)$　　※ かっこの中の符号が変わる‼

$=-(x+4)(x-1)$

★ 11p の練習問題 $\boxed{11}$ をせよ。

D. もうちょっとレベルアップした因数分解

さて、もうちょっとレベルアップした因数分解を見てみよう。

【例題 6】

次の式を因数分解せよ。

(1) $(a+b)x-(a+b)y$

(2) $(x+3)^2-7(x+3)+10$

(3) $(a-b)^2-c^2$

解

(1) 共通因数は単項式でも多項式でもかまわない。ただ、多項式の場合、それが共通因数である、と認識できなければお手上げである。

$(a+b)x-(a+b)y$　　※ $(a+b)$が共通因数

$=\quad Ax\quad-\quad Ay$　　※ $a+b=A$ とおく。

$=\quad A(x-y)$　　※ 理屈がわかったらこの行は省いてもよい

$=(a+b)(x-y)$　$\Longleftarrow$　$A=a+b$ をもどして

(2) これはもう、パターンを覚えていなければならない。

$(x+3)^2-7(x+3)+10$

$=\quad X^2\quad-\quad 7X\quad+10$　　※ $x+3=X$

$=\quad(X-5)(X-2)$

$=\{(x+3)-5\}\{(x+3)-2\}$　　※ $X=x+3$ をもどす

$=(x-2)(x+1)$

(3) これも(2)と同じくパターンを覚えておく。

$$
\begin{aligned}
&(a-b)^2-c^2 \\
=\ & A^2 - c^2 && ※\ a-b=A\ とおいて \\
=\ & (A+c)(A-c) \\
=\ & \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} && ※\ A=a-b\ をもどす \\
=\ & (a-b+c)(a-b-c)
\end{aligned}
$$

［注］上のパターンは □^{2} －△^{2} の形だね。

★ 12p の練習問題 $\boxed{12}$ をせよ。

Ⅲ. 式の計算の利用

数や図形の性質を考えるのに、式の計算(展開･因数分解)が利用できる場合も数多い。今度は、そのような角度から乗法の公式を確認してみる。

A. 公式を利用した計算

筆算しなければ答えが出せない計算も、展開･因数分解の公式を利用することによってラクに出せることがある。

【例題 7】
乗法の公式を利用して、次の計算をせよ。
(1) 81×79　　(2) 49^2

《考え方》
81 を$(80+1)$，79 を$(80-1)$ とみると、$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ が利用できるし、
49 ＝$(50-1)^2$ とみると、$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ が利用できる。

解

(1) $81 \times 79 = (80+1)(80-1)$
$= 80^2 - 1^2$
$= 6400 - 1 = 6399$

(2) $49^2 = (50-1)^2$
$= 50^2 - 2 \times 50 \times 1 + 1^2$
$= 2500 - 100 + 1 = 2401$

B. 式の値

【例題 8】

$a = 6.87,\ b = 3.13$ のとき、式 $a^2 + 2ab + b^2$ の値を求めよ。

《考え方》

直接代入すると、計算がメンドーだね。そこで、因数分解の公式を利用することを考える。ツゴウのいいことに、

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$　で、$a + b = 6.87 + 3.13 = 10$ となる。

解

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\ &= (6.87 + 3.13)^2 \\ &= 10^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

どうだ、カンタンだろ?「人間の知恵」ってすごいネー。

【例題 9】

$x = -2,\ y = -3$ のとき、次の式 $a^2 + 2ab + b^2$ の値を求めよ。

$8(x^2 + xy) - 2y(4x - 5y)$

《考え方》

これも直接代入すると計算がメンドー。そこで、まずその式を簡単にしてから代入した方が計算はラクであり、ミスも少ない。

解

$8(x^2 + xy) - 2y(4x - 5y)$　　※ まず、展開

$= 8x^2 + \cancel{8xy} - \cancel{8xy} + 10y^2$　　※ 整理する

$= 8x^2 + 10y^2$　　※ そして代入

$= 8 \cdot (-2)^2 + 10 \cdot (-3)^2$

$= \quad 32 \quad + \quad 90$

$= 122$

★ 13p の練習問題 $\boxed{13}$ をせよ。

C. 整数に関する証明問題への利用

文字を使った証明問題では、〈偶数・奇数〉と〈連続した整数〉のからむ問題が多いので、最低限、次のことを知っておく必要がある。

〈偶数·奇数〉を文字で表すには?

自然数を n とすると、偶数は $2n$, 奇数は $2n+1$ または $2n-1$

〈連続した 3 つの整数〉を文字で表すには?

真ん中の整数をを n とすると、残り 2 つの数は $n+1$ と $n-1$

【例題 10】

「連続した 2 つの偶数の積に 1 をたした数は、奇数の 2 乗になる。」ことを証明せよ。

《考え方》

連続した偶数を、自然数 n を使って表すと

$2n,\quad 2n+2$ ($2n-2$ でもよい)

この 2 つの積に 1 をたした数は、$2n(2n+2)+1$

これを展開し、整理したのち、因数分解して $(2n+1)^2$ と変形すれば 証明完了となる。

解

連続した 2 つの偶数を、自然数 n を使って表すと

$2n,\quad 2n+2$ である。

$2n(2n+2)+1 = 4n^2+4n+1$ ………展開した

$= (2n+1)^2$ ………因数分解した

$2n+1$ は奇数だから、

連続した 2 つの偶数の積に 1 をたした数は、奇数の 2 乗になる。

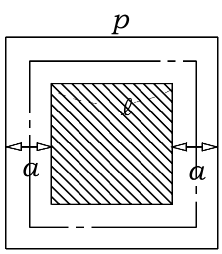
★ 14p の練習問題 $\boxed{14}$ をせよ。

D. 図形への利用

【例題 11】

1 辺の長さが p の正方形の花だんのまわりに、右の図のような幅 a の道がついている。

道の真ん中を通る線の長さを ℓ とすると、この道の面積は $a\ell$ に等しいことを証明せよ。



解

大きな正方形の 1 辺の長さは　$p+2a$

これより、道の面積を S とすると、

$$
\begin{aligned}
S &= (p+2a)^2 - p^2 \\
&= p^2 + 4ap + 4a^2 - p^2 \\
&= 4ap + 4a^2 \\
&= 4a(p+a) \\
&= a \cdot 4(p+a)
\end{aligned}
$$

ここで、 $\ell = 4(p+a)$ より $S = a\ell$

※ このように図形で利用するときは、問題に応じていろいろに式を変形する必要がある。

★ 15p の練習問題 $\boxed{15}$ をせよ。